Logaritmus

Logaritmus je exponent, kterým když umocníme základ logaritmu, dostaneme logaritmované číslo. (jinak: logaritmus jako funkce hledá exponent, kterým musíme umocnit základ logaritmu, abychom dostali logaritmované číslo)

Mějme $\log_a x = y$ … a je základ logaritmu
x je logaritmované číslo
y je logaritmus

Dle definice platí: $\boxed{\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \text{, kde } a > 0\text{, } a \text{ se nerovná 1.}}$

Logaritmus o základu 10 nazveme dekadický logaritmus, běžně zapisuje bez uvedení základu:

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmus o základu *e* (*e* – Eulerovo číslo, *e* = 2,718) nazveme přirozený logaritmus, zapíšeme:

$$\log_e x = \ln x$$

Vzorce pro počítání s logaritmy:

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a a^x = x$

Pro výpočet logaritmu odlišného základu než 10 (dekadický logaritmus), užijeme vzorce:

$\log_a x = \log_{10} x / \log_{10} a$

Postup pří řešení rovnic s logaritmy:

1. Odlogaritmování.

Pokud se podaří logaritmickou rovnici upravit do tvaru $\log_a(výraz1) = \log_a(výraz2)$ můžeme přejít k rovnici $výraz1 = výraz2$. Této úpravě se říká *odlogaritmování*.

2. Úprava pomocí vzorců

3. Substituce – nahrazení složitějšího výrazu jednodušším

Dané čísla vyjádřete jako logaritmy při daném základě:

$3\{\log_{10}\}$ $\quad 2\{\log_5\}$ $\quad -1\{\log_{0,5}\}$ $\quad 0,5\{\log_4\}$ $\quad 0\{\log_\pi\}$ $\quad \sqrt{2}\{\log_3\}$

Řešte logaritmické rovnice:

$\log_a 8 = 3$

$\log_{10} x = -2$

$\log_3 \dfrac{1}{27} = x$

$\log_4 \dfrac{1}{16} = x$

Logaritmické rovnice

$\log_4 x = -3$

$\log x = 3$

$\log_4 \frac{1}{256} - \log_{10} 10 + \log_3 243$

$\frac{\log_2 16 - 3^{\log_4 4}}{\log_{10} 0{,}1}$

$\frac{\log_3 \frac{1}{27} - 2^{\log_7 49}}{\log_{10} 0{,}1}$

$2 \cdot \log_5 25 + 3 \cdot \log_2 64 + \log_3 \frac{1}{9}$

$\log_2 (x+1) = 3$

$\log_2 (x-2) = 4$

$\log_{\frac{1}{3}} (1+x) = -1$

$\log_3 (5-2x) = 1$

$4 \cdot \log_3 (2x-1) = 12$

$4 \cdot \log_4 (5x-4) = 8$

$\log\left(\log_2\left[\log_{0,5} x\right]\right) = 0$

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5} x\right\}\right]\right) = \frac{1}{3}$

$\log_9\left(3\log_2\left[1+\log_3\left\{1-2\log_3 x\right\}\right]\right) = 0{,}5$

$\log_3 (x+5) = \log_3 (2x-1)$

$\log_5 (x^2-17) = \log_5 (x+3)$

$\log_4 (x+5) = \log_4 (2x-1)$

$2 \cdot \log x = \log 9$

$2 \cdot \log x = \log(x+6)$

$\log_2 (x^2+x) = \log_2 (-2x)$

$\log_2 (x^2-x) = \log_2 (3-3x)$

$\log_3 (2x+3) - \log_3 (x-2) = 2$

$\log(5x) + \log(x-1) = 2$

$\log(x+3) + \log(x-3) = 2 \cdot \log(x+1)$

$\log_2 (4x-4) - \log_2 (3-x) = 2$

$\log_5 (x^2+2x) = \log_5 (-3x) \quad K = \{-5\}$

$\log_6 (x+1) + \log_6 x = 1 \quad K = \{2; -3\}$

$\log(x-2) + \log(8x+4) = 3 \quad K = \{12\}$

$\log_2 (x+7) - \log_2 x = 3 \quad K = \{1\}$

$\log_3 (2x+3) - \log_3 (x-2) = 2 \quad K = \{3\}$

$\log x^5 - \log x^4 + \log x^3 = 12 \quad K = \{1000\}$

$\frac{1}{2}\log(2x+7) = \log(x-2) \quad K = \{5\}$

$2\log_2 \sqrt{x} + \log_2 2x - 3 = 0 \quad K = \{2\}$

$-\log \frac{1}{x^4} + \log(10x) - 6 = 0 \quad K = \{10\}$

$-\log_3 \frac{1}{x^2} + \log_3 (3x) - 4 = 0 \quad K = \{3\}$

Pomocí substituce:

$\log^2 x - \log x^3 + 2 = 0 \quad K = \{10; 100\}$

$\log^2 x + \log x^2 - 3 = 0 \quad K = \{0{,}001; 10\}$

$\log_2{}^2 x + \log_2 x^3 + 2 = 0 \quad K = \{0{,}25; 0{,}5\}$

$\log^2 x + \log x^3 + 2 = 0 \quad K = \{0{,}01; 0{,}1\}$

$\log_3{}^2 x + \log_3 x^2 - 3 = 0 \quad K = \left\{\frac{1}{27}; 3\right\}$

$\log_{\frac{1}{7}} x + \frac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x} = -2$

$\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$

$\log_3^2 (x+1) + \frac{1}{\log_3^2 (x+1)} = \frac{17}{4}$

$\log_4^2 x^3 - \frac{1}{\log_4^2 x^2} = 8$